Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Национальный исследовательский университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вычислительная математика

Лабораторная работа №5

Вариант № 1

Выполнил: студент группы P3208, Васильев Н. А.

Преподаватель: Машина Е.А.

Санкт-Петербург 2025

# Текст задания

Интерполяция функции

Цель работы

Решить задачу интерполяции, найти значения функции при заданных значениях аргумента, отличных от узловых точек.

Описание метода, расчётные формулы

Вычислительная реализация задачи:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | y | X1 | X2 |
| 0,25 | 1,2557 | 0,251 | 0,402 |
| 0,30 | 2,1764 |
| 0,35 | 3,1218 |
| 0,40 | 4,0482 |
| 0,45 | 5,9875 |
| 0,50 | 6,9195 |
| 0,55 | 7,8359 |

Таблица конечных разностей для заданной таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | yi | ∆yi | ∆2yi | ∆3yi | ∆4yi | ∆5yi | ∆6yi |
| 0,25 | 1,2557 | 0,9207 | 0,0247 | -0,0437 | 1,0756 | -4,1277 | 10,1917 |
| 0,30 | 2,1764 | 0,9454 | -0,0190 | 1,0319 | -3,0521 | 6,0640 |  |
| 0,35 | 3,1218 | 0,9264 | 1,0129 | -2,0202 | 3,0119 |  |  |
| 0,40 | 4,0482 | 1,9393 | -1,0073 | 0,9917 |  |  |  |
| 0,45 | 5,9875 | 0,9320 | -0,0156 |  |  |  |  |
| 0,50 | 6,9195 | 0,9164 |  |  |  |  |  |
| 0,55 | 7,8359 |  |  |  |  |  |  |

Вычислим значение функции для X1, используя первую интерполяционную формулу Ньютона, так как 0,251 ближе к началу интервала:

Вычислим значение функции для X2, используя первую интерполяционную формулу Гаусса, так как 0,402 находится в правой части интервала (0,402 > 0,40):

Листинг программы

def compute\_differences(x, y):  
 n = len(x)  
 table = [[x[i], y[i]] + [None] \* (n - 1) for i in range(n)]  
  
 for order in range(1, n):  
 for i in range(n - order):  
 if order == 1:  
 table[i][order + 1] = round(table[i + 1][order] - table[i][order], 4)  
 else:  
 table[i][order + 1] = round(table[i + 1][order] - table[i][order], 4)  
  
 return table  
  
  
def lagrange\_interpolation(x\_values, y\_values, x):  
 n = len(x\_values)  
 result = 0.0  
  
 for i in range(n):  
 term = y\_values[i]  
 for j in range(n):  
 if j != i:  
 term \*= (x - x\_values[j]) / (x\_values[i] - x\_values[j])  
 result += term  
  
 return result  
  
  
def newton\_divided\_differences(x\_values, y\_values, x):  
 n = len(x\_values)  
 coefficients = y\_values.copy()  
  
 for j in range(1, n):  
 for i in range(n - 1, j - 1, -1):  
 coefficients[i] = (coefficients[i] - coefficients[i - 1]) / (x\_values[i] - x\_values[i - j])  
  
 return evaluate\_newton\_divided(x\_values, coefficients, x)  
  
  
def evaluate\_newton\_divided(x\_values, coefficients, x):  
 n = len(coefficients)  
 result = coefficients[-1]  
  
 for i in range(n - 2, -1, -1):  
 result = result \* (x - x\_values[i]) + coefficients[i]  
  
 return result  
  
  
def newton\_forward\_difference(x\_values, y\_values, x):  
 n = len(x\_values)  
 h = x\_values[1] - x\_values[0]  
  
 diff\_table = [y\_values.copy()]  
 for i in range(1, n):  
 diff\_table.append([])  
 for j in range(n - i):  
 diff\_table[i].append(diff\_table[i - 1][j + 1] - diff\_table[i - 1][j])  
  
 t = (x - x\_values[0]) / h  
  
 result = diff\_table[0][0]  
 product = 1.0  
 for i in range(1, n):  
 product \*= (t - (i - 1)) / i  
 result += product \* diff\_table[i][0]  
  
 return result  
  
  
def newton\_backward\_difference(x\_values, y\_values, x):  
 n = len(x\_values)  
 h = x\_values[1] - x\_values[0]  
  
 diff\_table = [y\_values.copy()]  
 for i in range(1, n):  
 diff\_table.append([])  
 for j in range(n - i):  
 diff\_table[i].append(diff\_table[i - 1][j + 1] - diff\_table[i - 1][j])  
  
 t = (x - x\_values[-1]) / h  
  
 result = diff\_table[0][-1]  
 product = 1.0  
  
 for i in range(1, n):  
 product \*= (t + (i - 1)) / i  
 if n - i - 1 >= 0 and i < len(diff\_table) and n - i - 1 < len(diff\_table[i]):  
 result += product \* diff\_table[i][n - i - 1]  
 else:  
 break  
  
 return result

Примеры и результаты работы программы

**Пример 1:** Функция ln(x) на интервале [1; 4], разбиение на 10 точек, точка интерполяции 2:

Вы ввели узлы интерполяции:

x = 1.0, y = 0.0

x = 1.3333333333333333, y = 0.28768207245178085

x = 1.6666666666666665, y = 0.5108256237659906

x = 2.0, y = 0.6931471805599453

x = 2.333333333333333, y = 0.8472978603872034

x = 2.666666666666667, y = 0.9808292530117263

x = 3.0, y = 1.0986122886681098

x = 3.3333333333333335, y = 1.2039728043259361

x = 3.6666666666666665, y = 1.2992829841302609

x = 4.0, y = 1.3862943611198906

Таблица разностей:

---------------------------------------------------------------------------------------------

x | y | Δ^1y | Δ^2y | Δ^3y | Δ^4y | Δ^5y | Δ^6y | Δ^7y | Δ^8y | Δ^9y

---------------------------------------------------------------------------------------------

1.000 | 0.000 | 0.288 | -0.065 | 0.024 | -0.011 | 0.006 | -0.003 | 0.001 | 0.002 | -0.004

1.333 | 0.288 | 0.223 | -0.041 | 0.013 | -0.005 | 0.003 | -0.002 | 0.002 | -0.002 |

1.667 | 0.511 | 0.182 | -0.028 | 0.007 | -0.002 | 0.001 | 0.000 | -0.000 | |

2.000 | 0.693 | 0.154 | -0.021 | 0.005 | -0.002 | 0.001 | -0.000 | | |

2.333 | 0.847 | 0.134 | -0.016 | 0.003 | -0.001 | 0.001 | | | |

2.667 | 0.981 | 0.118 | -0.012 | 0.002 | -0.001 | | | | |

3.000 | 1.099 | 0.105 | -0.010 | 0.002 | | | | | |

3.333 | 1.204 | 0.095 | -0.008 | | | | | | |

3.667 | 1.299 | 0.087 | | | | | | | |

4.000 | 1.386 | | | | | | | | |

---------------------------------------------------------------------------------------------

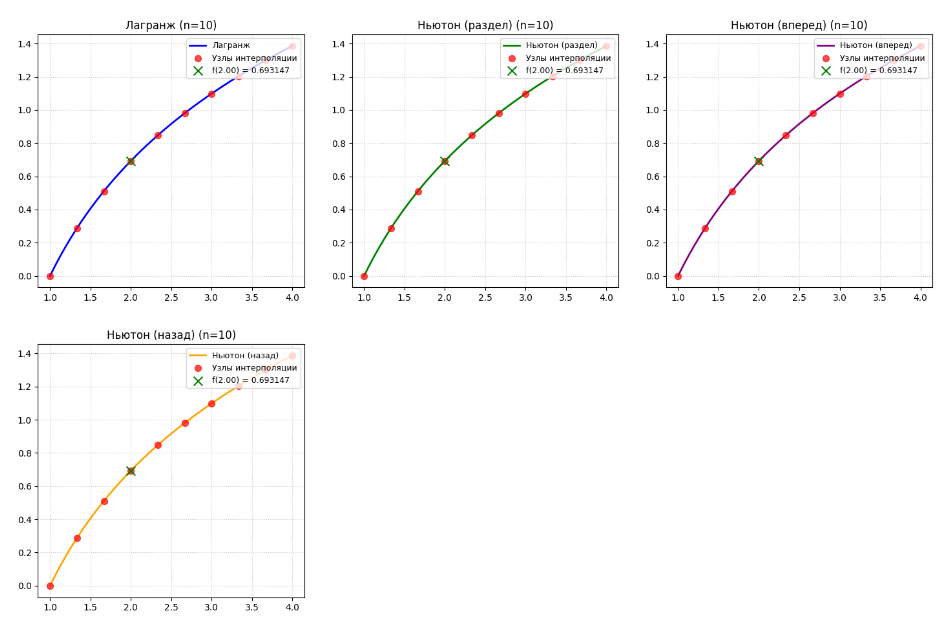
Результат интерполяции:

Многочлен Лагранжа: 0.6931471805599453

Многочлен Ньютона с разделенными разностями: 0.6931471805599453

Многочлен Ньютона с прямыми разностями (первая формула): 0.6931471805599455

Многочлен Ньютона с прямыми разностями (вторая формула): 0.6931471805599451



**Пример 2:** Точка интерполяции 0.25, точки:  
0.1 1.0

0.2 1.44

0.3 2.25

0.4 3.24

0.5 4.41

Вы ввели узлы интерполяции:

x = 0.1, y = 1.0

x = 0.2, y = 1.44

x = 0.3, y = 2.25

x = 0.4, y = 3.24

x = 0.5, y = 4.41

Таблица разностей:

------------------------------------------------

x | y | Δ^1y | Δ^2y | Δ^3y | Δ^4y

------------------------------------------------

0.100 | 1.000 | 0.440 | 0.370 | -0.190 | 0.190

0.200 | 1.440 | 0.810 | 0.180 | 0.000 |

0.300 | 2.250 | 0.990 | 0.180 | |

0.400 | 3.240 | 1.170 | | |

0.500 | 4.410 | | | |

------------------------------------------------

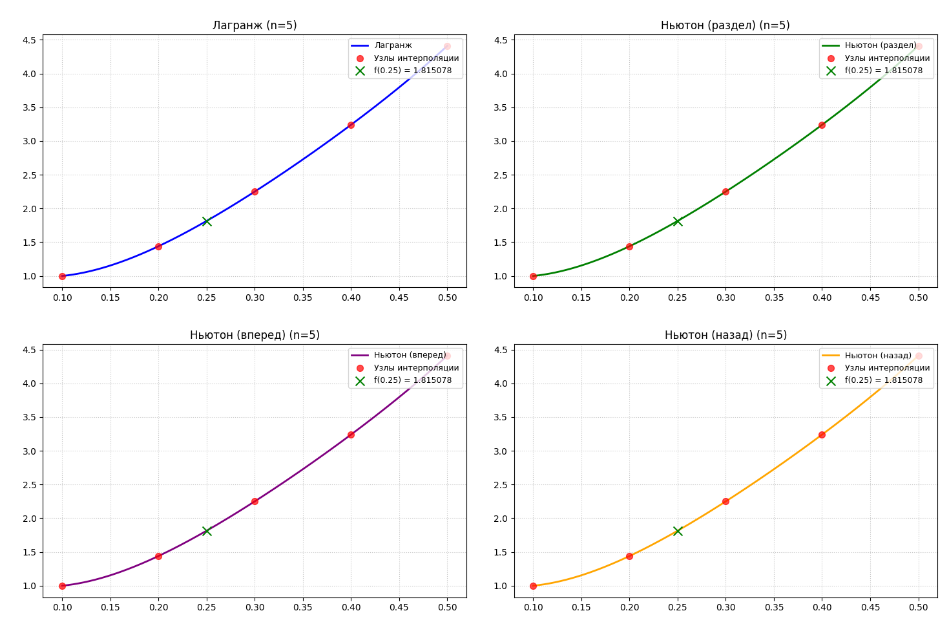
Результат интерполяции:

Многочлен Лагранжа: 1.815078125

Многочлен Ньютона с разделенными разностями: 1.815078125

Многочлен Ньютона с прямыми разностями (первая формула): 1.8150781249999997

Многочлен Ньютона с прямыми разностями (вторая формула): 1.815078125



Вывод

В ходе лабораторной работы были изучены и реализованы различные методы интерполирования функций: метод Лагранжа, метод Ньютона (в трёх формах) и метод прямого хода схемы Гаусса. Каждый из этих методов позволил построить интерполяционный полином по заданному набору точек и оценить значение функции в промежуточных узлах.